UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

1er parcial MODELO

MA-1111, MODELO I, Enero – Marzo 2007

1. Determinar los valores de x que satisfacen las desigualdades: $(7Ptos)$
$$\left|\frac{x^2+3}{|x+1|}-\frac{1}{|x|+5}\right| \le \frac{x^2+3}{|x+1|}+\frac{1}{|x|+5} \text{ y } \frac{|2x-3|+x}{|x-1|}\le 2$$

2. Un triángulo equilátero tiene sus tres lados iguales. Si dos vértices de un triángulo equilátero están en los puntos $A=(0,0)$ y $B=(4,3)$, ¿Dónde se encuentra el tercer vértice? $(5Ptos)$

3. Dada la función:
$$f(x)=\begin{cases} 1+x & Si \quad x \le -\frac{\pi}{2} \\ sen(x) & Si \quad -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1-x & Si \quad \frac{\pi}{2} < x \end{cases}$$
   a. Bosqueje la gráfica de la función. $(2Ptos)$
   b. Determine el rango de la función. $(1Ptos)$
   c. Determine la función $g \circ f$, donde la función g es $g(x)=\frac{x}{|x|}$, e indique su dominio y rango. $(3Ptos)$

4. Considere la función $f(x)=\begin{cases} -(x-3)^2 & si \quad x \le 3 \\ (x-3)^2 & si \quad x > 3 \end{cases}$.
   a. ¿Es f inyectiva en su dominio de definición? En caso afirmativo, determine la expresión de la función inversa, especificando su dominio y rango. $(8Ptos)$
   b. ¿Es f, una función par o impar? $(4Ptos)$

RESPUESTA: MA-1111, EXAMEN 1, Enero – Marzo 2007

1.- Determinar los valores de x que satisfacen las desigualdades:

$$\left|\frac{x^2+3}{|x+1|}-\frac{1}{|x|+5}\right| \le \frac{x^2+3}{|x+1|}+\frac{1}{|x|+5} \quad \text{y} \quad \frac{|2x-3|+x}{|x-1|} \le 2 \ (**) \qquad (7\,Ptos)$$

SOLUCION:

1 Pto

1.1.- La desigualdad $\left|\frac{x^2+3}{|x+1|}-\frac{1}{|x|+5}\right| \le \frac{x^2+3}{|x+1|}+\frac{1}{|x|+5}$:

se satisface para: $x \in A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}$.

Esto es una consecuencia directa de la desigualdad triangular $\left(\forall a, b \in \mathbb{R},\ se\ \ tiene: \ |a+b| \le |a|+|b|\right)$

1.2.- La desigualdad $\frac{|2x-3|+x}{|x-1|} \le 2$:

Si $x \neq 1 \Leftrightarrow x \in S_0 = (-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

$$\frac{|2x-3|+x}{|x-1|} \le 2 \Leftrightarrow |2x-3|+x \le 2|x-1| \Leftrightarrow |2x-3|-2|x-1|+x \le 0$$

1 Pto

Caso 1: $2x-3<0 \ \wedge \ x-1<0$		
$2x-3<0 \Leftrightarrow x<\frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow x \in S_{11} = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$	$x-1<0 \Leftrightarrow x<1$ $\Leftrightarrow x \in S_{12} = (-\infty,1)$	Si $x \in S_{11}\cap S_{12}$ entonces: $\lvert 2x-3\rvert-2\lvert x-1\rvert+x \le 0$ $\Leftrightarrow -2x+3+2x-2+x \le 0$ $\Leftrightarrow x \le -1 \Leftrightarrow x \in S_{13} = (-\infty,-1]$
En este caso la solución es: $x \in S_1 = S_{11}\cap S_{12}\cap S_{13} = (-\infty,-1]$		

1 Pto

Caso 2: $2x-3\ge 0 \ \wedge \ x-1<0$		
$2x-3\ge 0 \Leftrightarrow x\ge\frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow x \in S_{21} = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$	$x-1<0 \Leftrightarrow x<1$ $\Leftrightarrow x \in S_{22} = (-\infty,1)$	Si $x \in S_{21}\cap S_{22}$ entonces: $\lvert 2x-3\rvert-2\lvert x-1\rvert+x \le 0$ $\Leftrightarrow 2x-3+2x-2+x \le 0$ $\Leftrightarrow x \le -1 \Leftrightarrow x \in S_{23} = (-\infty,1]$
En este caso la solución es: $x \in S_2 = S_{21}\cap S_{22}\cap S_{23} = \emptyset$		

1 Pto

Caso 3: $2x-3<0 \ \wedge \ x-1\ge 0$		
$2x-3<0 \Leftrightarrow x<\frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow x \in S_{31} = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$	$x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$ $\Leftrightarrow x \in S_{32} = [1,+\infty)$	Si $x \in S_{31}\cap S_{32}$ entonces: $\lvert 2x-3\rvert-2\lvert x-1\rvert+x \le 0$ $\Leftrightarrow -2x+3-2x+2+x \le 0$ $\Leftrightarrow x \le -5 \Leftrightarrow x \in S_{33} = (-\infty,-5]$
En este caso la solución es: $x \in S_3 = S_{31}\cap S_{32}\cap S_{33} = \emptyset$		

1 Pto

Caso 4: $2x-3\geq 0 \quad \wedge \quad x-1\geq 0$		
$2x-3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow x\in S_{41}=\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$	$x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$ $\Leftrightarrow x\in S_{42}=[1,+\infty)$	Si $x\in S_{41}\cap S_{42}$ entonces: $\lvert 2x-3\rvert-2\lvert x-1\rvert+x\leq 0$ $\Leftrightarrow 2x-3-2x+2+x\leq 0$ $\Leftrightarrow x\leq 1 \Leftrightarrow x\in S_{43}=(-\infty,1]$
En este caso la solución es: $x\in S_4=S_{41}\cap S_{42}\cap S_{43}=$ Ø		

1 Pto

Luego La desigualdad $\frac{\lvert 2x-3\rvert+x}{\lvert x-1\rvert}\leq 2$ se satisface para

$x\in B=S_0\cap S_1\cap S_2\cap S_3\cap S_3=(-\infty,-1]$

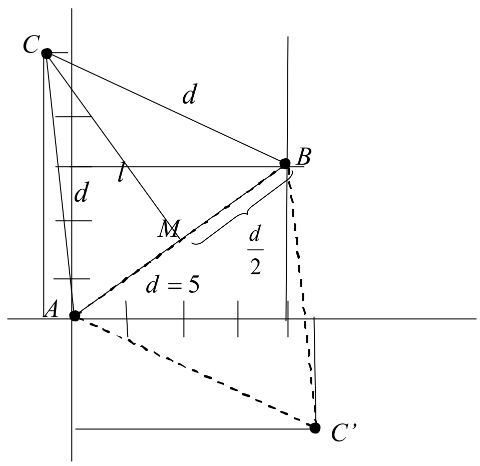
1 Pto

:

1.3.- Los valores de x que satisfacen las desigualdades (**)
son: $x\in S=A\cap B=(-\infty,-1)$

2.- Un triángulo equilátero tiene sus tres lados iguales. Si dos vértices de un triángulo equilátero están en los puntos $A=(0,0)$ y $B=(4,3)$, ¿Dónde se encuentra el tercer vértice? $(5Ptos)$

SOLUCION:



$$d=dist(A,B)=\sqrt{4^2+3^2}=5,\quad l=d\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{5}{2}\sqrt{3},\quad M=\left(2,\frac{3}{2}\right)$$

1 Pto

Tomando $C=(a,b)$, considerando que C esta sobre la recta que es perpendicular al Segmento $\overline{AB}$, cuya pendiente es $m_{\perp}=-\frac{4}{3}$, se obtiene: $b=-\frac{4}{3}(a-2)+\frac{3}{2}$

1 Pto

Como $dist(C,A)=d$, se tiene

$$a^2+b^2=25 \Leftrightarrow a^2+\left(-\frac{4}{3}(a-2)+\frac{3}{2}\right)^2=25$$

$$\Leftrightarrow a^2+\frac{16}{9}\left(a^2-4a+4\right)-4(a-2)+\frac{9}{4}=25$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{9}a^2-\frac{100}{9}a-\frac{275}{36}=0$$

$$\Leftrightarrow a^2-4a-\frac{11}{4}=0$$

1 Pto

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2} \\ a_1=\dfrac{4-3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto:

1 Pto

$$\begin{cases} b_1=-\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}-2\right)+\dfrac{3}{2}=-2\sqrt{3}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{3-4\sqrt{3}}{2} \\ b_2=-\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{4-3\sqrt{3}}{2}-2\right)+\dfrac{3}{2}=2\sqrt{3}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{3+4\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

1 Pto

En consecuencia, el tercer vértices puede encontrarse en el punto $C=\left(\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}\ ,\ \dfrac{3-4\sqrt{3}}{2}\right)$ ó $C'=\left(\dfrac{4-3\sqrt{3}}{2}\ ,\ \dfrac{3+4\sqrt{3}}{2}\right)$

3.- Dada la función:

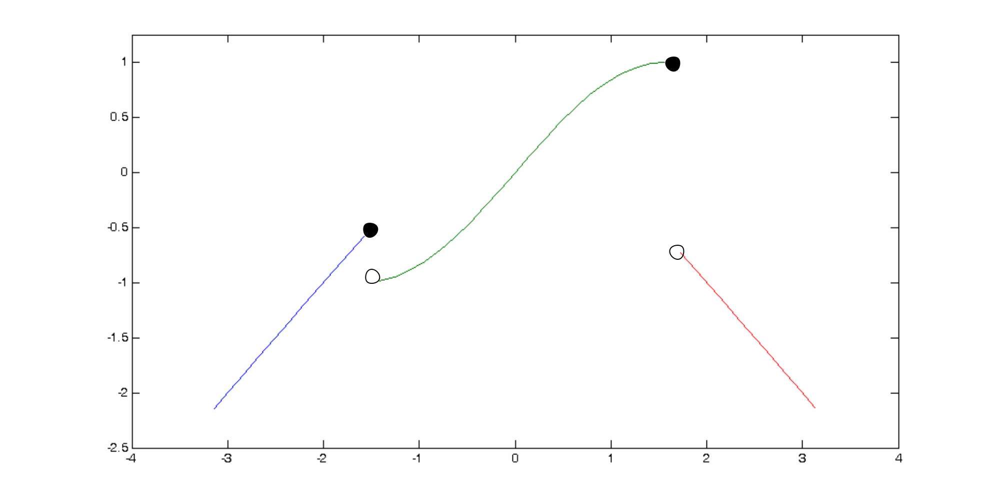
$$f(x)=\begin{cases} 1+x & Si \quad x\le -\dfrac{\pi}{2} \\ sen(x) & Si \quad -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2} \\ 1-x & Si \quad \dfrac{\pi}{2}<x \end{cases}$$

a. Bosqueje la gráfica de la función. $(2Ptos)$
b. Determine el rango de la función. $(1Ptos)$
c. Determine la función $g\circ f$, donde la función g es $g(x)=\dfrac{x}{|x|}$, e indique su dominio y rango. $(3Ptos)$

SOLUCION: a. La grafica es de la forma

1 Pto

1 Pto



1 Pto

b. $Rang(f) = (-\infty, 1)$

c. $g \circ f$ no esta definida cuando $f(x) = 0$, luego no esta definida solamente cuando $x = 0$. Supongamos $x \neq 0$:

1 Pto

$$g \circ f(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} = \begin{cases} \dfrac{1+x}{|1+x|} & Si \quad x \leq -\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{sen(x)}{|sen(x)|} & Si \quad -\dfrac{\pi}{2} < x \leq \dfrac{\pi}{2} \wedge x \neq 0 \\ \dfrac{1-x}{|1-x|} & Si \quad \dfrac{\pi}{2} < x \end{cases}$$

1 Pto

$$g \circ f(x) = \begin{cases} -1 & Si \quad x \leq -\dfrac{\pi}{2} \\ -1 & Si \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \\ 1 & Si \quad 0 < x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ -1 & \quad \dfrac{\pi}{2} < x \end{cases}$$

1 Pto

$$Dom(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad Rang(g \circ f) = \{-1, 1\}$$

4.- Considere la función $f(x)=\begin{cases} -(x-3)^2 & si \quad x \le 3 \\ & \\ (x-3)^2 & si \quad x > 3 \end{cases}$.

a. ¿Es f inyectiva en su dominio de definición? En caso afirmativo, determine la expresión de la función inversa, especificando su dominio y rango. $(8Ptos)$

b. ¿Es f, una función par o impar? $(4Ptos)$

SOLUCION: a. Considérese x_1 y x_2, tales que: $f(x_1) = f(x_2)$

1 Pto

$$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} -(x_1-3)^2 = -(x_2-3)^2 & Si \quad x_1 \le 3 \wedge x_2 \le 3 \\ (x_1-3)^2 = -(x_2-3)^2 & Si \quad x_1 > 3 \wedge x_2 \le 3 \\ -(x_1-3)^2 = (x_2-3)^2 & Si \quad x_1 \le 3 \wedge x_2 > 3 \\ (x_1-3)^2 = (x_2-3)^2 & Si \quad x_1 > 3 \wedge x_2 > 3 \end{cases}$$

1 Pto

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x_1-3| = |x_2-3| & Si \quad x_1 \le 3 \wedge x_2 \le 3 \\ \text{Imposible} & \\ \text{Imposible} & \\ |x_1-3| = |x_2-3| & Si \quad x_1 > 3 \wedge x_2 > 3 \end{cases}$$

1 Pto

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(x_1-3) = -(x_2-3) & Si \quad x_1 \le 3 \wedge x_2 \le 3 \\ \text{Imposible} & \\ \text{Imposible} & \\ x_1-3 = x_2-3 & Si \quad x_1 > 3 \wedge x_2 > 3 \end{cases}$$

1 Pto

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1-3) = (x_2-3) & Si \quad x_1 \le 3 \wedge x_2 \le 3 \\ \text{Imposible} & \\ \text{Imposible} & \\ x_1-3 = x_2-3 & Si \quad x_1 > 3 \wedge x_2 > 3 \end{cases}$$

1 Pto

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 & Si \quad x_1 \le 3 \wedge x_2 \le 3 \\ \text{Imposible} & \\ \text{Imposible} & \\ x_1 = x_2 & Si \quad x_1 > 3 \wedge x_2 > 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$$

1 Pto

Luego f es inyectiva.

1 Pto

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} 3-\sqrt{-x} & Si \quad x\le 0 \\ 3+\sqrt{x} & Si \quad x>0 \end{cases}$$

1 Pto

$$Dom\left(f^{-1}\right)=\mathbb{R}=Rang\left(f^{-1}\right)$$

2 Pto

b.

$f(-1)=-16$

$f(1)=-4$

1 Pto

no es Par, ya que $f(-1)\neq f(1)$

1 Pto

y no es Impar, ya que $f(-1)\neq -f(1)$